

数理生物学 1/1

[1] 病原体に感染していない宿主の数を x 、感染した宿主の数を y としたとき、次の式が成立する。(計 60 点)

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-ux) - \beta xy, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy - cy. \quad (2)$$

ここで、 r, u, β, c は正の定数で、 $\beta > cu$ を満たす。

(1) (1)式と(2)式とがそれぞれゼロになる線を x - y 平面上に描き、上記の常微分方程式のグラフの概形を描け。(20 点)

(2) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ (第 1 象限と軸を含む) において平衡状態は 3 つある。それらを求めた上で、それぞれはどのような集団構成になっているかを説明せよ。(15 点)

(3) 式(1)の右辺と(2)式の右辺を $f(x,y)$ および $g(x,y)$ と書く。ヤコビ行列 $\begin{vmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{vmatrix}$

を、正の平衡状態の周りで計算し、その固有値 λ が満たす式を示せ。(15 点)

(4) 病気がなく宿主が平衡状態で維持されている集団に、病気の個体が少数侵入したとする。そのあとモデルは次のいずれを示すか番号を書きなさい。(10 点)

- (i) 病気が急速にひろがりそのあと全員に感染して宿主個体群とも絶滅する。
- (ii) 病気は侵入できずに滅びてもとの状態にもどる。
- (iii) 病気がある比率で存在し、感染していない宿主とも安定に共存する。
- (iv) 病気の流行がいつまでも周期的に繰り返す。

[2] 分裂で増殖する生物が、新しい生息地に少数で侵入してきたとき、偶然に絶滅しないで環境収容力 K にまで増える確率を考える。時刻 t に x 個体いたとすると、次のステップ時刻 $t+1$ ではそのうち 1 つが分裂して $x+1$ 個体となる確率が ax 、1 つが死んで $x-1$ となる確率は bx 、変化がない確率は $1-(a+b)x$ と近似できるとする。ここで 2 個体以上の分裂や死亡は 1 ステップでは生じないとする。 $(a+b)K < 1$ が成立するとする。(計 40 点)

(1) あるときに x 個体いた集団が最終的に絶滅する前に環境収容力 K に到達する確率を q_x とする。それが以下の式を満たすことを説明せよ。(15 点)

$$q_x = axq_{x+1} + bxq_{x-1} + (1-(a+b)x)q_x, \quad x=1, 2, 3, \dots, K-1$$

$$q_0 = 0, \quad q_K = 1$$

(2) $a > b$ として、 q_x を求めよ ($x=0, 1, 2, 3, \dots, K$)。 (15 点)

(3) 新たな生息地に 1 個体が侵入したとする。そのとき個体が死ぬまでに産む子の数は平均的に 1 よりも大きくても、高い確率で絶滅する。また逆に死ぬまでに産む子の数の平均値が 1 より小さい場合でも、環境収容力 K に到達することができる。その理由を言葉で説明せよ。(10 点)