問題番号［１７］＜数理生物学＞

感染症の流行を捉えた以下の数理モデルを考える。ここで、ある時刻tの病気に感染していない個体数（感受性者数）を$S(t)$、病気に感染している個体数（感染者数）を$I(t)$、病気から回復し免疫を獲得した個体数（免疫獲得者数）を$R(t)$とする。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta S(t) - \nu)I(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \nu I(t).$$

上のモデルでは、病気の伝播率は感受性者数$S(t)$と感染者数$I(t)$との積に比例するとし、一日あたり・単位個体あたりの感染率はβであると仮定した。また、感染者の回復率は感染者数$I(t)$に比例するとし、単位時間当たりνであるとした。ここで、任意の時刻tに対して$S(t)+I(t)+R(t)=N$を満たしている。以下の問いに答えなさい。（計 50 点）

（１）集団に感染症が出現した初期には、ほとんどの個体は感受性であるため、感受性者数はNと近似できる。このとき$I(t)$は以下の微分方程式に従って時間変化する。

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta N - \nu)I(t). \qquad (式 1)$$

式 1 を解き、時間 tを横軸にとり$I(t)$の時間変化を縦軸に図示しなさい。（10 点）

（２）感染者は一日あたり回復率νで病気から回復するため、感染から回復までにかかる期待時間は $1/\nu$である。流行初期において感染者が感染性でいる間に産生する２次感染者の総数、すなわち基本再生産数R_0を示しなさい。（10 点）

（３） COVID-19 において感染拡大初期のデータから、R_0はおよそ 3 であると推定された。感染者 1 人から始まって、福岡市の人口の半数がこの感染症に感染するまでに何日かかるか式 1 をもとに計算しなさい。なお一日あたりの回復率$\nu = 0.1$であり、福岡市の人口の半数はおよそ 8×10^5 だと仮定し、計算には $\log[4 \times 10^5] = 13$ として用いなさい。(10 点)

（４）式 1 に基づく予測は感染拡大初期にだけあてはまり、長期の予測には適さない。流行初期には$I(t)$は増大し$S(t)$は減少するが、より長期的には$S(t)$がaを下回るまで減少すると$I(t)$は減り始め感染症はいつか終息する。aを求め、時間 tを横軸にとり$S(t)$、$I(t)$、$R(t)$を図示しなさい。（10 点）

（５）ワクチンを接種することで、感染症の伝播率を $(1-f)\beta$に抑制する事が可能になった状況を考える。ここでfは感染症の伝播率を抑制する効果であり $0 < f < 1$を満たす。感染拡大初期に全感受性者に対してワクチンが接種され、$R_0 = 3$の感染症の流行を阻止する事に成功したとき、fの最小値を計算しなさい。（10 点）