問題番号［１７］　＜数理生物学＞

寿命が 2 歳の生物を考える。この生物は、1 歳で成熟し子を残すとする。各個体は、一年間生き延びると年齢が 1 だけ増える。このような齢構造を持つ生物集団の個体群動態は行列Aを用いて以下のようにモデル化できる。

$$\begin{pmatrix} n_0(t+1) \\ n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} n_0(t) \\ n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで、$n_i(t)$はt年におけるi歳の個体密度であり、b_iとs_iはそれぞれi歳$(i = 0,1,2)$の個体が示す年あたりの出生率と生存率である。b_iとs_iはそれぞれ非負であり、$t = 0$の個体密度を初期値とする。上記モデルに関する以下の問いに答えなさい。（計 50 点）

（１）$t = 2$における各齢の個体密度$n_0(2), n_1(2), n_2(2)$を求めなさい。（10 点）

（２）t年経過したときの各齢の個体密度を、行列Aと初期値を示す以下のベクトル

$$\boldsymbol{n}(0) = \begin{pmatrix} n_0(0) \\ n_1(0) \\ n_2(0) \end{pmatrix}$$

を用いて表しなさい。（10 点）

（３）十分に時間が経過したときに実現される齢構造は安定齢分布と呼ばれる。安定齢分布を以下の手順で求めなさい。（計 25 点）

（ａ）行列Aは 3 つの固有値を持ち、各固有値λ_k（$k = 0, 1, 2$)に対する右固有ベクトルを$\boldsymbol{u}_k$とすると、$\boldsymbol{u}_k$は$A\boldsymbol{u}_k = \lambda_k \boldsymbol{u}_k$を満たす。初期個体密度$\boldsymbol{n}(0)$は、$\boldsymbol{u}_k$の線形結合として$\boldsymbol{n}(0) = c_0\boldsymbol{u}_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2$と書き表せるとしたとき、十分に時間が経つと$\boldsymbol{n}(t)$の動態は絶対値が最大の固有値$\lambda_0$に支配されることを示しなさい。なお$c_k$（$k = 0, 1, 2$)は定数である。（10 点）

（ｂ）安定齢分布は、λ_0に対応する右固有ベクトル$\boldsymbol{u}_0$として計算できる。$\boldsymbol{u}_0$をλ_0を使って求めなさい。（10 点）

（ｃ）安定齢分布に達した個体群のサイズは、毎年どのように変化するか説明しなさい。（5 点）

（４）行列Aが以下の式で与えられる場合を考える。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3a^2/2 & 3a^3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

個体群は絶滅するか。固有値を計算した結果をもとに、絶滅する条件を答えなさい。なお$a > 0$とする。（5 点）