

問題番号 [1 3] <数理生物学>

生物の社会には多様な個体が存在し、互いに他個体との相互作用を通じて影響を及ぼし合っている。生物個体間の相互作用ネットワークについて、以下の問いに答えなさい。

(計 50 点)

(1) n 個体からなる集団において、各個体が相互作用の選好性を持たず、確率 p でランダムに他個体と相互作用する場合、各個体が相互作用する種数 k は以下の二項分布に従う。このような相互作用の構造は、ランダムネットワークとして知られる。

$$q(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (\text{式 1})$$

$q(k)$ の期待値と分散を求めなさい。(10 点)

(2) 生物個体間相互作用ネットワークには、ランダムネットワーク以外にスケールフリーネットワークと呼ばれる構造が存在する。スケールフリーネットワークでは、各生物個体が相互作用する個体数 k は、 α と γ を定数とする以下のべき分布に従う。

$$q(k) = \alpha k^{-\gamma} \quad (\text{式 2})$$

スケールフリーネットワークの特徴として適切なものを以下から一つ選びなさい。(10 点)

- ア 個体同士の相互作用が均一に分布しているため、どの個体も孤立しにくい
- イ 個体同士の結びつきが弱くなり、ネットワークは分断されやすい
- ウ 一部の個体が多く他の個体とつながり、情報や感染が広がりやすい

(3) スケールフリーネットワークが形作られる仕組みを考える。時刻 0 において、個体数 $n(0)$ が存在する集団を考える。単位時間ごとに新たな個体が加入し、既存の 1 個体と相互作用を結ぶ。この際、時刻 t に加入した個体は、より多くの相互作用をもつ既存個体と相互作用を結びやすいと仮定し、相互作用数 k_i を持つ既存の個体 i と相互作用を結ぶ確率を $k_i / \sum_{j=1}^{n(t)-1} k_j$ とする。ここで $\sum_{j=1}^{n(t)-1} k_j$ は時刻 t の集団における相互作用数の合計である。このとき、個体 i が相互作用する個体数 k_i は、以下の微分方程式に従って増大する。

$$dk_i/dt = k_i / \sum_{j=1}^{n(t)-1} k_j \quad (\text{式 3})$$

十分時間が経過すると $\sum_{j=1}^{n(t)-1} k_j$ は $2t$ と近似できることを用いて、 $k_i(t)$ を求めなさい。なお、個体 i が加入した時刻は t_i とおきなさい。(10 点)

(4) (3) の結果から導き出される予測として正しいものを一つ選びなさい。(10 点)

- ア より早期に加入した個体ほどより多くの相互作用を持つ
- イ 任意の個体において、相互作用する個体数は時間経過とともに線形に増加する
- ウ 任意の個体において、相互作用する個体数の増大率は時間によらず一定である

(5) (3) の結果をもとに、(式 2) の定数 γ を求めなさい。なお、その導出過程も示しなさい。(10 点)