

問題番号 [1 9] < 数学 >

次の (1) から (2) に答えなさい。(計 50 点)

(1) 次の (a) から (b) に答えなさい。

定数行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 、定数ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を用いて、実変数ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対するベクトル関数 $f(\mathbf{x})$ を、

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad \text{①}$$

と定義する。

(a) ①の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ をそれぞれ求めなさい。ただし、 $(\cdot)^T$ は (\cdot) の転置を表すとする。

(10 点)

(b) ①が最小となる点、および、その最小値を求めなさい。(10 点)

(2) 次の (a) から (c) に答えなさい。

(a) 常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = b - ay, y(t=0) = 0$$

を解いて、 $y(t), t \geq 0$ を求めなさい。ただし、 a, b は正の定数とする。(10 点)

(b) 常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - ay, y(t=0) = 0 \quad \text{②}$$

を解いて、 $y(t), t \geq 0$ を求めなさい。ただし、 a は正の定数とする。(10 点)

(c) ②の $t \rightarrow \infty$ における定常解は、三角関数となる。定常解となる三角関数の振幅と位相を求めなさい。(10 点)