

数理生物学 1/1

[1] ある一年生草本は生育期間が $T$ 日である。 $t$ は生育季節の始まりからの日数、 $x(t)$ は $t$ 日目におけるサイズを表す。期間の最初から $s$ 日間は次の式に従ってサイズが増大するとする。以下の設問に答えなさい。（計50点）

$$x(0) = a$$

$$\frac{dx}{dt} = bx \quad 0 < t < s$$

(1) このとき $a$ および $b$ はどのような意味があるか。またそれぞれが大きいのはどのような状況のときか。以下の語をすべて用いて説明しなさい。（15点）

光環境、土壤水分、植食性昆虫、種子サイズ

(2)  $s$ 日目においてサイズが増大が止まり、それ以降は光合成による生産物は繁殖器官への投資（花や果実の形成と維持）に回される。この繁殖投資の総量が、

$$\phi = bx(s) \cdot (T - s)$$

であることを説明しなさい。（10点）

(3) 繁殖投資量 $\phi$ を最大にする繁殖開始日 $s$ の値を求めなさい。（ $bT < 1$ とする）（15点）

(4) 同じ植物が、林床に生育する場合と光のよくあたる場所に生育する場合とで開花の日が異なる。これを植物の適応的な反応と考えて、(3)の結果にもとづいて説明しなさい。（10点）

[2]  $N$ 個のサイトがありそれぞれには1個体ずつが占めている。タイプ1の個体が占めるサイトが $x$ 個、タイプ2が占めるサイトが $N - x$ 個とする。1日ごとに、2つのサイトが重複を許してランダムに選ばれ、第1のサイトにある個体が除去されて第2のサイトにある個体と同じタイプが第1のサイトを占める。両者が同じタイプの場合には変化が生じない。以下の設問に答えなさい。（計50点）

(1) 1日の間にタイプ1が占めるサイト数が $x$ から $x+1$ になる確率は $\frac{x}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)$ 、 $x$ から $x-1$ になる確率も $\frac{x}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)$ 、 $x$ のままにとどまる確率が $1 - 2 \frac{x}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)$ であることを説明しなさい。（18点）

(2)  $t$ 日目にタイプ1が占めるサイトの数が $x$ である確率を $P_x(t)$ とする。次の式が成り立つことを説明しなさい。（ただし $x = 1, 2, \dots, N-1$ ）（17点）

$$P_x(t+1) = \left(1 - 2 \frac{x}{N} \left(1 - \frac{x}{N}\right)\right) P_x(t) + \frac{x-1}{N} \left(1 - \frac{x-1}{N}\right) P_{x-1}(t) + \frac{x+1}{N} \left(1 - \frac{x+1}{N}\right) P_{x+1}(t)$$

(3) 上記の漸化式は、 $\lambda$ が正の定数として、 $P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = \dots = P_{N-1}(t) = \lambda'$ という解をもつことを示しなさい。 $\lambda$ はいくらに選ぶ必要があるか。（15点）