

問題番号 [19] <数学>

次の(1)から(2)に答えなさい。(計50点)

(1)  $t \geq 0$  で定義される関数  $y(t)$  は、次の常微分方程式①を満たす。

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{2}y \quad \text{①}$$

このとき、次の(a)から(d)に答えなさい。

- (a) 初期条件  $y(t=0)=3$  の下で、関数  $y(t)$  を求めなさい。(10点)
- (b)  $t \rightarrow \infty$  のときに関数  $y(t)$  がとる値を  $y_0$  とおく。初期条件  $y(t=0)=3$  を与えたときの  $y_0$  を求めなさい。(5点)
- (c) 関数  $y(t)$  が  $t$  によらない関数となるための  $t=0$  における初期条件を求めなさい。(5点)
- (d) 初期条件  $y(t=0)=3$  を与えたときの関数  $y(t)$  が表す曲線と直線  $y=y_0$  および  $y$  軸で囲まれる領域の面積を求めなさい。(5点)

(2) ベクトル  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  を与える。このとき、ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の表す点を、それ

ぞれ  $A$  と  $B$  と表すことにする。次の(a)から(c)に答えなさい。

- (a) ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の内積を求めなさい。(5点)
- (b) 点  $B$  から、原点  $O$  と点  $A$  を通る直線に下した垂線の足を  $P$  とする。点  $P$  を表すベクトルを求めなさい。(10点)
- (c) 三角形  $OAB$  の面積を求めなさい。(10点)