

問題番号 [17] <数理生物学>

ある生物の遺伝子 X は高温シグナルの存在下でのみ転写され、高温ストレス応答に必要な遺伝子 Y の転写を調節していると考えられる。高温シグナル存在下で、遺伝子 X の転写産物の存在量が閾値 K を上回ったときにだけ、遺伝子 Y は転写されるとする。各遺伝子の転写産物は一定の率で分解されると考えると、高温シグナル存在下の遺伝子 X と Y の転写産物量 (x と y) の時間変化は以下の微分方程式で表すことができる。以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

$$\frac{dx}{dt} = \beta_x - \alpha_x x$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_y \theta(x > K) - \alpha_y y$$

$$\theta(x > K) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > K \\ 0 & \text{if } x \leq K \end{cases}$$

$x(t)$: 遺伝子 X の時刻 t における転写産物量

$y(t)$: 遺伝子 Y の時刻 t における転写産物量

β_x : 遺伝子 X の転写率

α_x : 遺伝子 X の転写産物分解率

β_y : 遺伝子 Y の転写率

α_y : 遺伝子 Y の転写産物分解率

- (1) 遺伝子 X と Y の両者とも転写されていない状態から、高温シグナルを受けて遺伝子 X が転写され始めた。 $x(t)$ の従う方程式を求めなさい。ここで時刻 $t = 0$ における遺伝子 X の転写産物量は $x(0) = 0$ である。(10 点)
- (2) 転写産物量 $x(t)$ が 0 から K まで増加し、遺伝子 Y の転写を引き起こすまでにかかる遅延時間 t_{ON} を求めなさい。(10 点)
- (3) 遅延時間 t_{ON} をより長くするためには、遺伝子 X の転写率 (β_x) と閾値 K がどのように変化すればよいかを説明しなさい。(10 点)
- (4) 高温ストレス応答には、遺伝子 Y の転写翻訳コスト c と高温耐性の利益 $bf(y)$ が存在すると考える。持続期間 D の高温シグナルに暴露された生物の適応度を以下の式で与える。

$$\omega(D, t_{ON}) = \int_{t_{ON}}^D (-c + bf(y)) dt$$

ここで c と b は正の定数であり、 $f(y)$ は遺伝子 Y の転写産物量 y の関数である。ある環境において、高温シグナルの持続期間が短いパルス D_1 と長いパルス D_2 が確率 p と $(1-p)$ でそれぞれ発生するとき、生物の平均適応度は $\bar{\omega}(t_{ON}) = p\omega(D_1, t_{ON}) + (1-p)\omega(D_2, t_{ON})$ となる。短パルス D_1 では $f(y) = 0$ であり長パルス D_2 では $f(y) = y^*$ に飽和するとき、平均適応度 $\bar{\omega}(t_{ON})$ を計算しなさい。(10 点)

- (5) 高温ストレス応答の遅延が適応的であるとき $\bar{\omega}(t_{ON} > 0) > \bar{\omega}(t_{ON} = 0)$ が成立する。このとき、 $p > A$ の条件が必要である。 A を b 、 c 、 y^* を用いて求めなさい。なお $\omega(D < t_{ON}, t_{ON}) = 0$ とし、 $by^* > c$ とする。(5 点)
- (6) $\bar{\omega}(t_{ON})$ が最大になる t_{ON} を求めなさい。(5 点)