

数理生物学 (1 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] 人口規模 N 人の都市で流行したあるウイルスによる致死性感染症の伝播動態を考える。感染者が発生した瞬間から t だけ経過した時刻における非感染者数を $S(t)$ 、感染者数を $I(t)$ 、死亡者数を $D(t)$ とすると、これらは以下の微分方程式に従う。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - rI(t),$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = rI(t).$$

ここで、 r は感染者の死亡率、 β は感染症の伝播率を表す。以下の問いに答えなさい (計 50 点)

- (1) 平衡点を求めなさい。(10 点)
- (2) 感染者は感染後、平均して $t = 1/r$ 時間後に死に至ることを示しなさい。(10 点)
- (3) 流行初期では、ほとんどが未感染者である。この時、感染者数 $I(t)$ の時間変化を線形微分方程式で表しなさい。(10 点)
- (4) (3) の線形微分方程式の解析解を求めなさい。(10 点)
- (5) 流行初期に感染者が単位時間あたりに産生する新規感染者数は βN である。流行初期において感染者が感染性でいる間に産生する 2 次感染者の総数、すなわち基本再生産数 R_0 を計算しなさい。(5 点)
- (6) 感染者体内のウイルス量を減少させる効果を持つ薬剤開発が可能になった。この薬剤を用いた抗ウイルス治療により伝播率が $0 < f < 1$ だけ減少する、すなわち、治療後の伝播率を $(1-f)\beta$ に抑制することが可能になった。そして、全感染者に対してこの治療が可能となり、 $R_0 = 2$ の感染症の流行を阻止することに成功した。この場合、開発された薬剤による伝播率の抑制効果である f の最小値を計算しなさい。(5 点)

数理生物学 (2 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] ある多年生植物の個体がつけた花は全て受粉され、他個体からの花粉で受精された種子 (他殖種子) を x 個、自分自身の花粉によって受精された種子 (自殖種子) が y 個作られると考える。他殖種子は確率 $s_{x,y}$ で捕食を逃れて生き残り次世代へと寄与するが、自殖種子は捕食を逃れたとしても近交弱勢のため発芽できず全て死亡すると仮定する。種子捕食者は、他殖種子と自殖種子を区別できずに捕食すると考え、他殖種子の生存率 $s_{x,y}$ を

$$s_{x,y} = \begin{cases} 1 - d/(x+y) & x+y > d \\ 0 & x+y \leq d \end{cases} \quad (1)$$

とする。ここで d は正の定数であり、他殖種子と自殖種子の総数 $(x+y)$ が d 以下であると全ての他殖種子が捕食されるが、 d を超えると食い残しが生じ他殖種子の生存率は増加すると仮定する。自殖種子を作る形質の進化可能性について、以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

(1) 種子を作るコストを c とすると、他殖種子を x 個、自殖種子を y 個作る個体の適応度 Φ は

$$\Phi = s_{x,y}x - c(x+y)$$

となる。上式の右辺の意味を説明しなさい。なお花はすべて他殖あるいは自殖によって受粉されると仮定する (10 点)

(2) 自殖種子を全く作らない状態 ($y=0$) から、自殖種子を作る形質が進化するためには、以下の条件

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} > 0$$

が満たされる必要がある。生存率が式(1)で与えられることを考慮して、上の条件を x, d, c のみを用いた不等式として求めなさい。(10 点)

(3) 自殖種子を作る形質が進化するとき、適応度を最大にする最適な自殖種子の数を求め、それが c とともにどのように変化するか説明しなさい。(10 点)

(4) ここまでは作られた花はすべて他殖あるいは自殖によって受粉されると考えてきた。次に受粉は完全ではなく受粉されない花が z 個作られる場合、自殖種子を作る形質が進化する条件を求めなさい。ただしここでは、受粉されない花は胚を発達させ種子捕食者の捕食対象となると考える。また x と z は変化しないとする。(10 点)

(5) 受粉されない花の存在は、自殖種子を作る形質の進化を促進するかについて(4)で得られた結果をもとに説明しなさい。(10 点)