平成23年度システム生命科学府生物関係3講座（生命医科学、分子生命科学、生命理学）
専門科目・筆記試験　問題

数理生物学（1／1）

［1］

ある生物集団の個体数は、良い年には$(1+a)$倍になり、悪い年には$(1-b)$倍になる。良い年と悪い年とは、確率pと$1-p$でランダムに生じる。ただし$a>0$，$0<b\le 1$，$0<p<1$とする。最初には個体数はx_0であった。（計60点）

（1）最初のn年間に、良い年がk年、悪い年が$n-k$年含まれていたとすると、n年後の個体数x_nはいくらになるかを計算しなさい。（9点）
（2）上記のようになる確率を求めなさい。（8点）
（3）n年後の個体数の平均値$E[x_n]$が以下のようであることを示しなさい。（10点）

$$E[x_n]=x_0(1+ap-b(1-p))^n$$

（4）$a=2$，$b=1$，$p=\frac{1}{2}$のときに、n年後までにその生物集団が絶滅している（つまり個体数が0になる）確率を求めなさい。また絶滅確率はnが大きい極限でいくらに成るか求めなさい（15点）
（5）パラメータが上記の値をとるときに、個体数の平均値$E[x_n]$は、nとともに増大することを示しなさい。（8点）
（6）1つの集団を追跡すると確実に絶滅することと、平均個体数が増大することとは一見矛盾するように見える。どのようなことが生じているのかを分かりやすく説明しなさい。（10点）

［2］

次のモデルは一斉開花・結実する植物の体内に蓄積される資源量x_tの時間変化を示すモデルを単純にしたものである。（計40点）

$$x_{t+1}=\begin{cases} x_t+1, & \text{for } x_t<0 \\ -2x_t^{\,2}+1, & \text{for } x_t\ge 0 \end{cases} \qquad t=0,1,2,3,\ldots$$

（1）右辺はx_tの関数である。この関数のグラフの概形を描きなさい。（10点）
（2）$x_0=0$からスタートする解を求めなさい。これは周期解であるが、その周期はいくらか。（10点）
（3）この周期解が安定であることを示しなさい。（20点）
（ヒント：$\varepsilon>0$を小さな正の数として、$x_0=\varepsilon$のときの時系列を求めなさい。それがtが増大するときに上記の周期解に近づくことを示しなさい。ここで$0<8\varepsilon^2-8\varepsilon^4<\frac{\varepsilon}{2}$が成立するとします。$x_0=-\varepsilon$のときにも同様の計算を行いなさい）。