

問題番号 [1 7] < 数理生物 >

生物の個体数変化を単純化して表現した以下の数理モデルは、ロジスティック写像と呼ばれる。

$$x_{n+1} = f(x_n) = a(1 - x_n)x_n$$

ここで x_n は時間 n における生物の個体数であり、 a は内的自然増殖率である。

以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

- (1) 平衡状態をすべて求めなさい。(10 点)
- (2) 各平衡点について線形安定性を求めなさい。(10 点)
- (3) 次に、以下のように x_1 と x_2 の個体数が繰り返し現れる 2 周期解を考える。

$$x_2 = ax_1(1 - x_1), x_1 = ax_2(1 - x_2)$$

ここで x_1 を x としたとき、 x は以下の 4 次方程式を満たす。

$$x = a^2x(1 - x)(1 - ax(1 - x))$$

上の方程式を x について解き、(1) と異なる解を x_1 および x_2 として求めなさい。(10 点)

- (4) x_1 と x_2 の個体数が繰り返し現れる 2 周期解が安定である条件を、以下の手順で求めなさい。
 - (a) $x = f(f(x)) = g(x)$ とする。 $g(x)$ を縦軸に x を横軸にとったグラフを描き、(3) で求めた解をプロットしなさい。(5 点)
 - (b) x_1 と x_2 で 2 周期解が安定であるためには、 $x = x_1$ におけるグラフの傾きの絶対値が 1 より小さい必要がある。この条件をもとに、2 周期解が安定であるために内的自然増殖率 a が満たすべき条件を求めなさい。(5 点)
- (5) 内的自然増殖率 a が増加し (4) で求めた条件が満たされなくなると、何が起こるかを説明しなさい。(10 点)