

問題番号 [20] <数学>

次の (1) から (5) に答えなさい。(計 50 点)

ベクトル関数 $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ は、行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ によって与えられる常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \text{①}$$

を満たす。このとき、次の (1) から (4) に答えなさい。

(1) 行列 \mathbf{A} の固有値をすべて求めなさい。(10 点)

(2) 行列 \mathbf{A} を対角化しなさい。(10 点)

(3) 行列の指数関数 $\exp[t\mathbf{A}]$ を対角化しなさい。(10 点)

(4) 常微分方程式①を解いて、 $\mathbf{u}(t)$ を求めなさい。ただし、初期条件は $\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ と与える。(10 点)

常微分方程式①において、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$ と改めて与える。ただし、 a, b, c, d は非負の定数

で、 $\det(\mathbf{A}) = 1$ を満たす。このとき、次の (5) に答えなさい。

(5) $\mathbf{u}(t)$ が振動、もしくは、減衰振動する条件を求めなさい。(10 点)