

問題番号 [1 7] <数理生物学>

資源を巡る闘争を説明するモデルに、タカ・ハトゲームがある。タカ・ハトゲームでは、タカ戦略 (H) は相手の出方に関わらず攻撃し、ハト戦略 (D) は平和的に振る舞う。タカ戦略同士が出会うと激しい闘争に発展し、結果として勝率 $1/2$ で資源 (v) を手に入れるが負けた場合は怪我を負う損失 (c) を支払う。ハト戦略同士が出会うとお互いに資源を半分ずつ分け合う。タカ戦略とハト戦略が出会うとハト戦略は逃げ出しタカ戦略が資源をまるごと手に入れる。これらをまとめると 2 個体間でられるタカ・ハトゲームの利得表は下記のように表される。なお利得表の()内の数値は個体 2 の利得を表す。以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

		個体 2 の戦略	
		タカ (H)	ハト (D)
個体 1 の戦略	タカ (H)	$\frac{v-c}{2} \left(\frac{v-c}{2} \right)$	$v \ (0)$
	ハト (D)	$0 \ (v)$	$\frac{v}{2} \left(\frac{v}{2} \right)$

(1) 十分に個体数の多い集団を考える。各個体はタカ戦略あるいはハト戦略のいずれかを確定的にとる純粋戦略を持ち、集団内の他個体とランダムに対戦すると考える。このとき、集団中のタカ戦略をとる個体の割合を p 、ハト戦略をとる個体の割合を $1-p$ とすると、ハト戦略をとる個体の適応度の期待値 W_D は $(1-p)v/2$ となる。タカ戦略をとる個体の適応度の期待値 W_H を同様に求めなさい。(10 点)

(2) (1) の状況において、タカ戦略をとる個体の割合変化は、集団の平均適応度 $\bar{W} = pW_H + (1-p)W_D$ を用いた以下の微分方程式(1)に従うと考える。このとき式(1)の平衡点は 3 つ存在し、これら 3 つの平衡点の値は x, y, z である。 x, y, z を求め、各平衡点が示す状態を説明しなさい。(10 点)

$$\frac{dp}{dt} = (W_H - \bar{W})p \quad (1)$$

(3) (2) で得られた各平衡点の局所安定性を求め、ハト戦略が安定して存在するために必要な条件を説明しなさい。(10 点)

(4) これまでは、集団の純粋戦略分布の時間的変化として各戦略の進化過程をとらえた。今度は集団中の野生型個体は、タカ戦略を確率 q で、ハト戦略を確率 $1-q$ で組み合わせた混合戦略を持つと考える。この混合戦略の進化的安定性を以下の手順に沿って調べなさい。(各 10 点、計 20 点)

(a) 野生集団にタカ戦略を確率 q' でハト戦略を確率 $1-q'$ でとる突然変異体がわずかな割合 ε だけ生じた。野生型個体と突然変異体の適応度を求めなさい。(10 点)

(b) (a) で求めた適応度の大小関係をもとに、タカ戦略を確率 x, y, z でもつ 3 通りの混合戦略がそれぞれ進化的に安定な戦略であるかどうかを調べなさい。このとき、 x, y, z は (2) で得られた各平衡点の値に等しい。また突然変異体は任意の確率でタカ戦略をとるとする。(10 点)

問題番号 [1 8] <数理生物学>

2020年、世界各国で新型コロナウイルスが大流行し、また、日本国内においても甚大な被害を引き起こすことになった。各国政府は、流行の段階に応じた様々な対策を講じることで流行の制御を試みた。以下の問いに答えなさい。(計50点)

(1) 新型コロナウイルス感染症は、新型コロナウイルスである“SARS-CoV2”による感染症のことである。WHOはこのウイルスによる感染症のことを“COVID-19”と名付けた。国中や世界中で、感染症が流行することは \boxed{X} と呼ばれており、WHOは感染症の感染力や流行の、その時々状況に応じて、 \boxed{X} に至るまで6つの警戒区分に分類している。この警戒区分は、対象となる感染症の原因となる病原体の病原性の強さや、流行の程度を考慮して総合的にWHOが判断して警戒や対策の実行を呼びかけるものである。Xを英語で答えなさい。(5点)

(2) 総人口数が N 人である地域で新型コロナウイルス感染者が発生した瞬間から t だけ経過した時刻における非感染者数を $S(t)$ 、感染者数を $I(t)$ 、回復者数を $R(t)$ とすると、これらは以下の微分方程式に従う。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - rI(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = rI(t).$$

ここで、 r は感染者の回復率、 β は新型コロナウイルスの伝播率を表す。また、新型コロナウイルスによる死亡率は無視できるくらい小さいと仮定する。総人口数 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ が従う微分方程式を導出し、 $N(t)$ を求めなさい。(5点)

(3) 典型的な1人の感染者を考えた場合、時刻 $t = s$ までに感染者が回復する確率は \boxed{A} である。この時、時刻 $t = s$ における確率密度関数が \boxed{B} となる。感染者が回復するまでの期待時間は \boxed{C} である。従って、感染者は平均して \boxed{C} 時間後に回復する。A、B、Cに入る式を答えなさい。(15点)

(4) 流行初期において感染者が生産する2次感染者数の総数は基本再生産数 R_0 と呼ばれる。問題(2)の数理モデルのパラメータである β と r を含めて、 R_0 を定式化しなさい。(10点)

(5) 一般的に伝播率 β は単位時間当たりの接触回数 c と単位接触当たりの感染率 p の積、すなわち $\beta = c \times p$ と定義できる。ある地域における新型コロナウイルスの基本再生産数が $R_0 = 2.5$ であった。仮に、接触を一律に制限できると仮定した場合、最低何%の接触回数を制限する政策を実施すれば流行をコントロールできるか答えなさい。(10点)

(6) また、総人口数が N 人のうち20%が医療従事者であり、接触を制限できない場合を考える。流行をコントロールするためには、残り80%の人々の接触を最低何%制限させる必要があるか答えなさい。(5点)