

問題番号[17] <数理生物学>

害虫と天敵の個体群動態を単純化して表現した以下の数理モデルを考える。ここで x と y はそれぞれ害虫と天敵の個体密度であり、時間 t の関数として次の連立微分方程式に従う。

$$\frac{dx}{dt} = r(1-x)x - a \frac{xy}{1+cx}$$

$$\frac{dy}{dt} = b \frac{xy}{1+cx} - y$$

上式の r, a, b, c は非負の実数である。以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

- (1) 平衡状態をすべて求めなさい。(10 点)
- (2) 上の式において $\frac{dx}{dt} = 0$ を満たす線すべてを (x, y) 平面上に描き、 (x, y) の増減をアイソクライン法によって図示しなさい。(10 点)
- (3) 害虫と天敵の両者が共存する平衡点 (共存平衡点) の存在条件を答えなさい。(10 点)
- (4) 共存平衡点の安定性を求めなさい。(10 点)
- (5) 殺虫剤によって害虫の死亡率が増加した場合を考え、上のモデルを改変しなさい。改変したモデルの共存平衡点を分析することで、殺虫剤の使用がもたらす帰結を予想しなさい。(10 点)

問題番号[18] <数理生物学>

ゲノムサイズが N 塩基のウイルスを考える。このウイルスの1塩基当たり・1複製当たりの変異率を M とする。単位複製当たり、各塩基の変異よりウイルスは独立して N 回の変異を獲得する機会があるとする。以下の問いに答えなさい (計 50 点)。

- (1) 1回の複製後、ウイルスゲノムに起こる変異の平均数を計算しなさい。(10点)
- (2) 各塩基の変異が二項分布に従うと考えた場合、1回の複製後、ウイルスゲノムに合計 L 個の変異が起こる確率を計算しなさい。ただし、 L は N 以下である。(10点)
- (3) 変異率 M が十分に小さくて、ゲノムサイズ N が十分に大きい場合を考える。ただし、(1)で求めた変異の平均数は変化しないとすれば、(2)はポアソン分布 $\frac{(NM)^L e^{-NM}}{L!}$ に従う。この時、1回の複製後、ウイルスゲノムに変異が1つも起こらない確率を求めなさい。(10点)
- (4) (3)の時、少なくとも1つの変異がウイルスゲノムに起こる確率を計算しなさい。(10点)
- (5) HIV-1 では $M \approx 10^{-5}$ かつ $N \approx 10^4$ 程度であることが知られている。1回のウイルス複製サイクルを経た後、変異を持たないウイルスができる確率、変異を1つ持つウイルスができる確率、変異を2つ持つウイルスができる確率をそれぞれ計算しなさい。ただし、 $e^{-0.1} \approx 0.9$ とする。(10点)