

## 数理生物学 (1 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] ゲノムサイズが  $N$  塩基のウイルスを考える。このウイルスの単位塩基当たり・単位複製当たりの変異率を  $M$  とする。異なる塩基に生じる突然変異は独立であるとする。

以下の問いに答えなさい(計 50 点)。

(1) 1 回の複製後、ウイルスゲノムに合計  $x$  個の変異が起こる確率が以下の  $p_x$  であることを説明しなさい。ただし、 $x = 0, 1, 2, \dots, N$ 。(10 点)

$$p_x = \binom{N}{x} M^x (1-M)^{N-x} \quad (1)$$

(2)  $S = NM$  とおく。 $S$  が一定のまま、 $N$  は非常に大きく、 $M$  が小さい極限を考えると、次の式になることを説明しなさい。(10 点)

$$p_x = \frac{S^x}{x!} e^{-S} \quad (2)$$

(ヒント:  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - S/N)^{N/S} = e^{-S}$  を用いよ)

(3) (2) の確率分布は何と呼ばれるか。(10 点)

(4) 1 回の複製後、ウイルスゲノムに起こる変異の平均数を、(2) の式を用いて計算しなさい。(10 点)

(5) 1 回の複製後、ウイルスが、少なくとも 1 カ所に変異をもつ確率を、(2) の式を用いて計算しなさい。(10 点)

## 数理生物学 (2 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] ある場所にいる生物の集団を考える。 $x$ は齢(生まれてからの時間)、 $t$ は時間、 $n(x, t)$ は、個体の齢分布である。死亡率  $u$  は一定で正の定数とする。次の式が成立することが知られている。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial x} - u n(x, t) \quad t > 0, x > 0 \quad (3)$$

$$n(0, t) = B(t) \quad t > 0 \quad (4)$$

$$n(x, 0) = f_0(x) \quad x \geq 0 \quad (5)$$

以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

(1)  $0 < a < b$  とする。時間  $t$  において齢  $x$  が  $a$  と  $b$  の間にある個体数は

$$F(t) = \int_a^b n(x', t) dx' \quad (6)$$

と表される。この量が次の式を満たすことを導きなさい。(8 点)

$$\frac{dF}{dt} = \int_a^b \left\{ -\frac{\partial n}{\partial x} - u n(x', t) \right\} dx' \quad (7)$$

(2) (7)式より、次の式を導きなさい。(8 点)

$$\frac{dF}{dt} = -n(b, t) + n(a, t) - u F(t) \quad (8)$$

(3)  $F(t)$  は齢  $x$  が  $a$  と  $b$  の間にある個体数であることを考え、(8)式で、右辺の第1項、第2項、第3項は、それぞれ  $F$  の変化にどのような影響を与えるのかを説明しなさい。(9 点)

(4)  $B(t)$  および  $f_0(x)$  は、それぞれ何を表すのか、説明しなさい。(10 点)

(5) 以下のように定義した  $n(x, t)$  を考える。

$$n(x, t) = B(t-x)e^{-ux} \quad t > x \quad \text{のとき、} \quad (9a)$$

$$n(x, t) = f_0(x-t)e^{-ut} \quad t < x \quad \text{のとき、} \quad (9b)$$

(9a, b)式が、(3), (4), (5)の式を満たすことを説明しなさい。(15 点)