

## 数理生物学 (1 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] ある植物は、一部の種子を地下部の果実に、他の種子を地上部の果実にと、2種類の種子をつくる。全部で $N$ 個の種子をつくる植物があったとき、そのうち $x$ 個を地下部に $N-x$ 個を地上部につくるとする。

地上部の果実からできた種子は遠くに散らばり、そのうちで水のある土壤に定着し無事に生存し成長できるもののわずかである。その割合を $s$ とする。

( $0 < s < 1$ )

他方で、地下部の果実からできた種子の生存率は

$$\frac{a}{1+bx}$$

であることが知られている (ここで $a$ と $b$ は正の定数)。

以下の問いに答えなさい (計 50 点)

(1) 上記の生存率が $x$ の減少関数であること理由として、どのような原因が考えられるか次の3つの語を用いて説明しなさい: 水、光、病害虫。(7点)

(2) 生き残って成長できる子供の総数は、

$$\phi(x) = x \frac{a}{1+bx} + (N-x)s$$

であることを説明しなさい。(10点)

(3)  $\frac{d\phi(x)}{dx}$  を計算しなさい。そして  $y = \frac{d\phi(x)}{dx}$  のグラフの概形を描きなさい。

(ヒント、 $a > s$ の場合と $a \leq s$ の場合に分けて考えてみよう) (15点)

(4) 親植物が地下部に作る種子数 $x$ を $0 \leq x \leq N$ の範囲で選ぶときに、 $\phi(x)$ を最大にする $x$ の値を求めなさい。(8点)

(5) 上記の結果について、横軸が $s$ で縦軸が $N$ であるような2次元平面に、次の3つの領域を分けて図示しなさい (領域の中に A, B, C の記号を書き込むこと)。(10点)

(A)すべての種子を地下部に作るのが最適。

(B)すべての種子を地上部に作るのが最適。

(C)一部の種子を地下部に、他を地上部に作るのが最適。

## 数理生物学 (2 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] あるウイルスの宿主体内における動態を考える。血中のウイルス粒子数を  $V(t)$ 、単位時間当たりに産生される総ウイルス粒子数を  $P$ 、ウイルス粒子の除去率を  $c$  とすれば、ウイルス粒子数の動態は以下の微分方程式に従うことが知られている。

$$\frac{dV(t)}{dt} = P - cV(t)$$

$P$  と  $c$  は正の定数とする。以下の問いに答えなさい (計 50 点)

(1) ウイルス産生数とウイルス除去数が釣り合ったとき、血中で維持されるウイルス粒子数  $V^*$  を求めなさい。(7 点)

(2) あるときに抗ウイルス薬の投与をはじめたところ、それ以降ではウイルス粒子数が次の式に従うことがわかっている。

$$\frac{dV(t)}{dt} = -cV(t)$$

その理由を説明しなさい。(7 点)

(3) 抗ウイルス薬を投与する前は、血液中のウイルス粒子数は最初には  $V^*$  であったとし、抗ウイルス薬を投与し始めた時刻を  $t=0$  とする。投与し始めて以降の時刻  $t=t_1 > 0$  における血中のウイルス粒子数を求めなさい。(10 点)

(4) 抗ウイルス薬の投与開始後、血中のウイルス粒子数が半分になるまでの時刻 (すなわち、血中のウイルス粒子数の半減期) を求めなさい。(10 点)

(5) 時刻  $t=0$  において存在していた特定のウイルス粒子が除去されるまでの時間を  $T$  とすると、それは次の確率分布をもつことを示しなさい。(8 点)

$$\Pr(t < T \leq t + dt) = e^{-ct} c dt$$

(6) ウイルス粒子が除去されるまでの平均時間を求めなさい。(8 点)