

数理生物学 (1 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] あるウイルスの宿主体内における動態を考える。その感染対象となる標的細胞のうち未感染の細胞数を $x(t)$ 、感染した細胞数を $y(t)$ 、血中のウイルス粒子数を $z(t)$ とすると、これらは以下の微分方程式に従う。

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - cx(t) - \beta x(t)z(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x(t)z(t) - ay(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = ky(t) - rz(t).$$

ここで λ は新たに補充される未感染標的細胞数、 c と a は未感染および感染の標的細胞の死亡率、 β は血中のウイルス粒子が標的細胞に取り付く率、 k は感染細胞がウイルス粒子を生産する速度、そして r はウイルス粒子の除去率を表す。(計 50 点)

(1) $(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{c}, 0, 0\right)$ が平衡状態であることを示しなさい。またこれは体内のどのような状況を表しているか説明しなさい。(15 点)

(2) 上記以外に、すべての変数が正であるような平衡状態が存在する場合がある。それを求めなさい。どのような条件のときに存在するか説明しなさい。(20 点)

(3) $(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{c}, 0, 0\right)$ の周りでの線形力学系の固有値 σ が従う式を求めなさい。この平衡状態の安定性を判定しなさい。(15 点)

数理生物学 (2 / 2)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] ある細菌は、細胞分裂が終わってから分裂までの時間 T が以下の一様分布に従う。

$$\Pr[t \leq T < t + dt] = \begin{cases} \frac{1}{a} dt, & \text{for } 0 < t \leq a \\ 0, & \text{for } t \leq 0, \text{ or } t > a \end{cases}$$

その培地には捕食者である繊毛虫もふくまれていて、細菌が捕食者に出会って食われるまでの時間 S は次の指数分布に従う。

$$\Pr[s \leq S < s + ds] = \begin{cases} e^{-bs} b ds, & \text{for } s > 0 \\ 0, & \text{for } s \leq 0 \end{cases}$$

ここで a と b とは正の数とする。(計 50 点)

- (1) 細胞分裂の時間間隔の平均値と分散を求めなさい。(12 点)
- (2) 時間 t の間に繊毛虫に出会わない確率はいくらか。(10 点)
- (3) 分裂直後の細胞が、繊毛虫に食われる前に細胞分裂を行う確率を求めなさい。(10 点)
- (4) 繊毛虫に食われる前に次の細胞分裂が生じた場合について、その分裂までの平均時間が次の式になることを説明しなさい。(10 点)

$$\frac{1 - e^{-ab}(1 + ab)}{b(1 - e^{-ab})}$$

- (5) この平均値は、(1)の平均時間に比べて短い。その理由を説明しなさい。(8 点)