平成24年度システム生命科学府生物関係3講座（生命医科学、分子生命科学、生命理学）

専門科目・筆記試験　問題

数理生物学（１／１）

［1］　次の文章を読んで以下の問いに答えなさい（計50点）。

ある島に生息する動物の集団を考える。それを宿主とするウイルスが、島の外部からランダムに（ポアソン過程で）侵入する。いったん侵入が生じると、それは一時的に広がったのち消えてしまう。宿主集団に長期にわたって維持されることはない。そのような侵入が生じる頻度は、単位時間あたりm回である。

このときランダムな時点から次に侵入が生じるまでの時間をTとすると、それは次の確率分布に従うことがわかっている。

$$\Pr[t \le T < t+dt] = \begin{cases} e^{-mt} m\,dt, & t>0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

（1）　次に侵入が生じるまでの時間、Tの平均値を求めよ。(10点)

（2）　Tの分散を求めよ。(10点)

（3）　あるときに侵入が生じたとして、その直近（その前の一番新しい）に侵入が生じてからL以上の時間がたっている確率を求めよ。(10点)

（4）　あるときに侵入が生じたとして、その直近に侵入が生じてからの時間がL以下の場合には、宿主集団に免疫を持つ個体が残っているために、ウイルスはひどくは広がらずにおさまる。これに対して、直近の侵入からL以上の時間が経過していると、免疫が失われているために大流行が引き起こされる。この場合、非常に長い時間Qにおいて何回の大流行が生じるか。この数を最大にするmを求めよ。(10点)

（5）　設問（4）において、mが非常に大きいときや非常に小さいときに比べて中間の値において最大になる理由を説明せよ。(10点)

［2］　次の文章を読んで以下の問いに答えなさい（計50点）。

次の式は、神経細胞の興奮を表現するためのモデルを単純化したものである。xとyは実数値をとり時間tの関数で、次の連立微分方程式に従う。

$$\frac{dx}{dt} = y - x + \frac{x^3}{3} \qquad \frac{dy}{dt} = \varepsilon(ax - y)$$

εおよびaは非負の実数である。

（1）平衡状態を求めよ。($0 \le a < 1$と$a \ge 1$に分けて結果を説明すること)（18点）

（2）上記の式の$\frac{dx}{dt}=0$のアイソクラインおよび$\frac{dy}{dt}=0$のアイソクラインを(x,y)平面の上に描け。($0 \le a < 1$と$a \ge 1$に分けて結果を説明すること)（10点）

（3）$\varepsilon=0$とする。このとき(x,y)の動きを図中に矢印で記入せよ。(8点)

（4）εが小さな正の値であるときに、設問（2）で描いた図に、安定平衡点を黒丸で、不安定平衡点を白丸で記入せよ。とくに、$a=0$の場合と、$a=2$の場合について説明せよ。(8点)

（5）εが小さな正の値であるときに、モデルの挙動はいずれになるかを、$a=0$の場合と、$a=2$の場合について、それぞれ以下の(ア)〜(オ)から記号で答えよ。(6点)

(ア) いつまでも振動をつづける。

(イ) どこからスタートしても安定な最終状態に収束する。

(ウ) 激しく振動してカオスを示す。

(エ) 初期値によって異なる結末になる。

(オ) 無限大に発散する。