数理生物学（１／３）

（注意）問題［1］［2］はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1]　ある寄生蜂の母親は、他の昆虫を宿主とし、その体に産卵すると仮定する。卵は宿主体内で幼虫や蛹の時期を過ごし、成虫となって羽化をして出てくる。１匹の宿主に多数の卵が産まれると、卵の羽化までの生存率は低下する。x 個の卵が産まれた宿主では、生存率は

$$S(x)=\begin{cases} a-bx, & \text{if } 0\le x\le a/b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であるとする。ただし a は b の 100 倍程度の数とし、産卵数は実数で近似できるとする。以下の問いに答えなさい。（計 50 点）

(1)　１匹の宿主には１匹だけの寄生蜂の母親が産卵する状況を考える。産卵数を x とすると、母親にとっての羽化するまで生存できる子の数は $xS(x)$ で、これを繁殖成功度と呼ぶ。母親の繁殖成功度を最大にする産卵数はいくらか、求めなさい。（6 点）

(2)　１匹の宿主に既に別の母親が x 個の卵を産んでいるとして、第２の母親が y 個の卵を追加して産むとする。第２の母親にとっての繁殖成功度は $yS(x+y)$ である。第２の母親にとって、自らの繁殖成功度を最大にする産卵数を求めなさい。それは x が変化したときどのように変わるか述べなさい。（6 点）

(3)　１匹の宿主には、必ず２匹の母親が産卵する状況を考える。宿主に最初に産卵する母親（第１雌）は x^* 個の卵を産み、そのあとでやってきて追加で産卵する母親（第２雌）は y^* の卵を産む、という状況を考える。第２雌が y^* を産卵する限り、第１雌はその産卵数 x を $x=x^*$ とするときに自らの繁殖成功を最大にできる。また第１雌が x^* の産卵数である限り、第２雌は産卵数 y を $y=y^*$ とするときに自らの繁殖成功度を最大に出来るという。このような x^* と y^* のペアを求めなさい。またそれぞれの繁殖成功度を求めなさい。（ただし、第２雌は、既に別の雌が産卵した宿主であることは、におい物質のマークによって分かるが、産卵数までは分からないとする）。（9 点）

(4)　宿主には、１匹の雌に産卵されるものと、２匹に産卵されるものがいるとする。宿主を最初に見つけた雌は、産卵したあと、p の確率で第２雌が追加の産卵を行うが、$1-p$ の確率で第２雌には見つからないとする。ただし、１宿主に３匹以上の寄生蜂が産卵することはないとする。第１雌はすべて x^*、第２雌はすべて y^* の卵を産む集団において、それぞれ、それらとは異なる産卵数を用いる母親は不利になるという。そのような x^* と y^* のペアを求めなさい。それらは p の関数であるので、横軸を p （$0<p<1$）にして、x^* と y^* のグラフを描きなさい。（12 点）

数理生物学（２／３）

（注意）問題［1］［2］はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] ある時刻tにおける病気に感染していない個体数（感受性者数）を$S(t)$、病気に感染している個体数（感染者数）を$I(t)$、病気から回復した個体数（死亡や隔離を含んだ除去者数）を$R(t)$で表せば、感染症の流行は以下の微分方程式で捉えられる：

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \nu I(t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \nu I(t).$$

ここで、任意の時刻tに対して$S(t) + I(t) + R(t) = N$を満たしている。ただし、病気の伝播は、感染者数$I(t)$と感受性者数$S(t)$の積に比例するとし、単位時間当たり・単位個体あたりの感染率はβであると仮定した。また、死亡・回復・隔離を含む感染者の除去は、感染者数$I(t)$に比例するとし、単位時間当たりの除去率はνであるとした。以下の問いに答えなさい（計 50 点）。

(1) 流行初期では、ほとんど個体は感受性である。すなわち、$S(t) = S(0) \approx N$と仮定できる。この時、感染者数$I(t)$の時間変化を微分方程式で表しなさい。(8 点)

(2) $\beta N - \nu = \lambda_0$と定義した時、任意の時刻$t$における感染者数$I(t)$を求めなさい。ここで$\lambda_0$はマルサス係数と呼ばれる。(8 点)

(3) 流行初期の感染者数$I(t)$が指数的に増加するためにマルサス係数が満たす条件について説明しなさい。(8 点)

(4) 感染者にとって感染からτ時間経過した時、死亡・回復・隔離により除去される確率は$1 - e^{-\nu\tau}$である。感染からτ時間経過した時に除去される確率密度を求めなさい。(5 点)

(5) 感染者が感染性である平均時間Tの長さを計算しなさい。(5 点)

(6) 流行初期に感染者が単位時間あたりに産生する新規感染者数はβNである。流行初期において感染者が感染性でいる間に産生する２次感染者の総数、すなわち基本再生産数R_0を計算しなさい。(5 点)

(7) 基本再生産数R_0が感染症の流行対策において果たす役割を論じなさい。(5 点)

(8) マルサス係数λ_0と感染者が感染性である平均時間T、基本再生産数R_0の関係を示し、感染症の流行初期において基本再生産数R_0がどのように推定されるかについて論じなさい。(6 点)

数理生物学（３／３）

（注意）問題［1］［2］はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

(5) これまでは、第2雌は、既に別の雌が産卵した宿主であることは、におい物質のマークによって分かるが、産卵数までは分からないと仮定してきた。別の種の寄生蜂では、第1雌の産卵数xが、第2雌により正確に分かる。このときは、第2雌の最適産卵数yは第1雌の産卵数xの関数になる。その状況では第1雌は、いくらの卵を産むのが自らの繁殖成功度を最大に出来るか、求めなさい。(ただしすべての宿主が2匹の雌により産卵される、つまり$p=1$とする)。(10点)

(6) 生存率が

$$S(x)=s_0\exp[-cx]$$

とする。ただし、$S_0>0$かつ$c>0$とする。これまで検討してきたいずれの状況においても、第2雌にとっての最適産卵数は、第1雌にとっての最適産卵数に依存しないことを示しなさい。(7点)