平成 28 年度システム生命科学府生物関係 3 講座（生命医科学、分子生命科学、生命理学）
専門科目・筆記試験　問題

数理生物学（１／２）

（注意）問題［1］［2］はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] 生物の個体群動態を表現する数式にロジスティック式がある。それは時刻 t での個体数を $x(t)$ とするとき、それが次の式に従うとするものである。（計 50 点）

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)\left(1-ax(t)\right)$$

(1)　個体群は増殖した後、遠い将来、最終的にいくらの値になるか示しなさい。(7 点)

(2)　生物個体が増えて、環境中の資源を使用しつくし、老廃物が蓄積することによって、個体数の増殖速度が抑えられるようになる。今の個体数が多いことに加えて、しばらく前での個体数が多いことが悪影響をもたらすという考えがある。それを表したモデルにつぎのものがある。

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)\left(1-ax(t)-b\int_0^t x(s)e^{-c(t-s)}\,ds\right)$$

ここで次の形の量は、どのような意味を表しているのか、説明しなさい。(7 点)

$$y(t)=\int_0^t x(s)e^{-c(t-s)}\,ds$$

(3)　またこれが次の微分方程式を満たすことを示しなさい。(7 点)

$$\frac{dy}{dt}=x(t)-cy(t)$$

(4)　すると、つぎのような連立微分方程式が成立する。

$$\frac{dx}{dt}=rx(t)\left(1-ax(t)-by(t)\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=x(t)-cy(t)$$

この連立微分方程式（もしくは力学系）を $x\geq 0$ と $y\geq 0$ の領域で考える。平衡状態を全て求めなさい。（ヒント、複数ある）(7 点)

(5)　次の形の行列をヤコビ行列という

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{dy}{dt}\right) \end{Vmatrix}$$

上記の力学系の平衡状態のうち、第１象限($x>0, y>0$) にあるものについてヤコビ行列を求めなさい。(7 点)

(6)　そのときヤコビ行列の固有値 λ が従う方程式を求めなさい。(7 点)

(7)　ヤコビ行列の固有値 λ は、パラメータの取り方によっては複素数になり実部は負であることがわかった。個体数は、どのような振る舞いをすると予想されるか，説明しなさい。(８点)

平成28年度システム生命科学府生物関係3講座（生命医科学、分子生命科学、生命理学）

専門科目・筆記試験　問題

数理生物学（２／２）

（注意）問題［1］［2］はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2]　１次元空間上でランダムに運動する細胞を考える。ここで、空間の座標をxと書くことにする。はじめ、時刻$t = 0$で細胞は原点$x = 0$にいる。時間刻みτが経過するごとに、細胞は確率pで右へaだけ移動し、確率p $(0 < p < 0.5)$で左へaだけ移動する。さらに、細胞の移動は、時間刻みτごとに独立に行われると仮定する。以下の問いに答えなさい（計50点）。

(1)　時間刻みが1回経過した時刻$t = \tau$で細胞が原点$x = 0$にいる確率を計算しなさい。（10点）

(2)　$\widehat{e_i}$をi番目の時間刻みでの細胞の動きを表す確率変数とする。$\widehat{e_i}$の期待値$\langle \widehat{e_i} \rangle$を計算しなさい。（10点）

(3)　$(\widehat{e_i})^2$の期待値$\langle (\widehat{e_i})^2 \rangle$を計算しなさい。（10点）

(4)　時間刻みがN回経過した時刻$t = N\tau$における細胞の位置を$\hat{x}(t)$とする。この時、$\hat{x}(t)$を$\widehat{e_1}$, $\widehat{e_2}$,…, $\widehat{e_N}$を用いて表しなさい。（5点）

(5)　時間刻みがN回経過した時刻$t = N\tau$における細胞の位置の期待値$\langle \hat{x}(t) \rangle$を計算しなさい。（5点）

(6)　時間刻みがN回経過した時刻$t = N\tau$における細胞の位置座標の二乗$\left(\hat{x}(t)\right)^2$の期待値$\left\langle \left(\hat{x}(t)\right)^2 \right\rangle$を計算しなさい。（5点）

(7)　１次元空間上でランダムに運動する細胞の原点からの移動距離は$\sqrt{\left\langle \left(\hat{x}(t)\right)^2 \right\rangle}$で特徴づけられる。この時、細胞の移動距離は時間$t$に対してどの様に変化するかを説明しなさい。（5点）