

## 数理生物学 (1 / 3)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[1] あるウイルスの培養細胞における感染動態を考える。その感染対象となる標的細胞のうち未感染の細胞数を  $T(t)$ 、感染した細胞数を  $I(t)$ 、ウイルス粒子数を  $V(t)$  とすると、これらは以下の微分方程式に従う。

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\beta T(t)V(t),$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta T(t)V(t) - \delta I(t),$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = pI(t) - cV(t).$$

ここで  $\delta$  は感染した細胞の死亡率、 $\beta$  はウイルス粒子が標的細胞に感染する率、 $p$  は感染細胞がウイルス粒子を生産する速度、そして  $c$  はウイルス粒子の除去率を表す。以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

(1) 平衡点の数を求めなさい。またこれは生物学的にどのような状況を表しているか説明しなさい。(10 点)

(2) 感染初期では、ほとんど細胞は未感染である。すなわち、 $T(t) = T(0)$  と仮定できる。この時、感染した細胞数  $I(t)$  とウイルス粒子数  $V(t)$  の時間変化を線形微分方程式で表しなさい。(10 点)

(3) (2) の線形微分方程式の係数行列を求めなさい。また、係数行列の固有値を計算しなさい。(20 点)

(4) 培養細胞においてウイルスが増殖する条件を求めなさい。また、その条件に生物学的な解釈を与えなさい。(10 点)

## 数理生物学 (2 / 3)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

[2] 土地所有者は、土地区画を森林 (F)、農地 (A)、放棄地 (E) のいずれかの状態で管理しており、森林、農地、放棄地はそれぞれ  $u_F$ ,  $u_A$ ,  $u_E$  の収入を土地所有者にもたらすと考える。個別の土地所有者が管理する多数の土地区画のうち、森林、農地、放棄地の状態にある土地区画の割合を  $x_F, x_A, x_E$  とする。また、平衡状態における森林、農地、放棄地の割合はそれぞれ  $x_F^*, x_A^*, x_E^*$  とする。以下の問いに答えなさい。(計 50 点)

(1) 放棄地の状態を無視し、森林と農地のいずれかの状態で土地区画が管理されている状況を仮定する。森林または農地から得られる収入 ( $u_F$  または  $u_A$ ) に応じて、森林は変化率  $r_{FA} = 1/(1 + e^{-\sigma(u_A - u_F)})$  で農地へ変化し、農地は変化率  $r_{AF} = 1/(1 + e^{-\sigma(u_F - u_A)})$  で森林へ変化すると仮定すると、平衡状態では

$$x_F^* r_{FA} = x_A^* r_{AF} \quad (\text{式 1})$$

が成立する。式(1)の左辺と右辺の項はそれぞれ何を意味するか説明しなさい。なお  $\sigma$  は定数である。(10 点)

(2) (1) と同様に森林と農地のいずれかの状態で各土地区画が管理されている場合、平衡状態における農地に対する森林の割合の比率 ( $x_F^*/x_A^*$ ) を求めなさい。さらに  $\sigma$  が非常に大きいとして ( $\sigma \rightarrow \infty$ )、 $x_F^*$  と  $x_A^*$  を求めなさい。(10 点)

(3) 実際には、農地を土地所有者の意思だけで速やかに森林へと戻すことはできず、農地から森林への遷移は自然再生に依存する。そこで、農地は変化率  $r_{AE} = 1/(1 + e^{-\sigma(u_E - u_A)})$  で放棄地へと変化した後に、自然再生率  $\alpha$  で森林へと遷移すると考える。このとき、以下の問いに答えなさい。

(a) 次の式が成り立つことを説明しなさい。(5 点)

$$x_F^* r_{FA} = x_A^* r_{AE} = x_E^* \alpha$$

[次のページへ続く]

## 数理生物学 (3 / 3)

(注意) 問題 [1] [2] はそれぞれ別の答案用紙に解答すること。

- (b) 比率  $x_F^* : x_A^* : x_E^*$  をもとめなさい。(5 点)
- (c)  $u_A > u_F > u_E$  のとき、 $x_F^*$ ,  $x_A^*$ ,  $x_E^*$  を求めなさい。なお、 $\sigma$  は非常に大きいとする ( $\sigma \rightarrow \infty$ )。(5 点)
- (d)  $u_F > u_A > u_E$  のとき、 $x_F^*$ ,  $x_A^*$ ,  $x_E^*$  を求めなさい。なお、 $\sigma$  は非常に大きいとする ( $\sigma \rightarrow \infty$ )。(5 点)
- (4) (3)-(d) の結果は、森林は最も高い収入をもたらす土地利用状態であるにもかかわらず、必ず実現されるわけではないことを意味している。その理由を説明し、(3)-(d) の結果をもとに森林を再生するために有効な方策を述べなさい。(10 点)